Umgekehrt überlegt man sich:

$\boxed{\text{Ist } K<0 \text{ auf } \Omega, \text{ so gibt es zu jedem } w\in\Omega \text{ genau zwei Asymptotenlinien durch } X(w).}$

⟨ Übung: 1.) Beweis 2.) Diskussion von Asymptotenlinien an Beispielen ⟩

Definition: Eine Kurve $\gamma = X\circ\omega$ heißt Krümmungslinie auf X, falls jeder Tangentenvektor $\gamma'(t)$ eine Hauptkrümmungsrichtung ist, falls also gilt

(7) $$S_{\omega(t)}(\gamma'(t)) = k(t)\,\gamma'(t)$$

mit $k(t) = \varkappa_1(\omega(t))$ oder $k(t) = \varkappa_2(\omega_2(t))$.

Schreibt man $\omega(t) = (\omega_1(t), \omega_2(t))$, so lautet (7)

$$\underbrace{S_{\omega(t)}\left(DX_{|\omega(t)}(\omega'(t))\right)}_{= -N_{u_1}(\omega(t))\omega_1'(t) - N_{u_2}(\omega(t))\omega_2'(t)} = k(t)\frac{d}{dt}(X\circ\omega)(t).$$

m. a. W. : Krümmungslinien $X = \gamma \circ \omega$ erfüllen

$$(8) \qquad -\frac{d}{dt}(N \circ \omega)(t) = k(t)\,\frac{d}{dt}(X \circ \omega)(t)$$

Nun kann man links die Weingarten - Gleichungen (2) benutzen, also

$$N_{u_\alpha} = -\sum_{\beta=1}^{2} b_\alpha^\beta X_{u_\beta}, \quad b_\alpha^\beta := \sum_{\gamma=1}^{2} b_{\alpha\gamma}\, g^{\gamma\beta},$$

$$\text{mit } (b_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} \mathcal{L} & \mathcal{M} \\ \mathcal{M} & \mathcal{N} \end{pmatrix}; \quad (g^{\gamma\beta}) = \begin{pmatrix} \mathcal{E} & \mathcal{F} \\ \mathcal{F} & \mathcal{G} \end{pmatrix}^{-1}$$

als Fundamentalmatrizen von II bzw. I.

Damit gilt ($\mathcal{E}, \mathcal{F}, \mathcal{G}, \ldots = \mathcal{E}(\omega), \mathcal{F}(\omega), \mathcal{G}(\omega), \ldots$)

$$-\frac{d}{dt}(N \circ \omega) = -DN_\omega(\omega') =$$

$$-N_{u_1}(\omega)\,\omega_1' - N_{u_2}(\omega)\,\omega_2' =$$

$$\omega_1' \sum_{\beta=1}^{2} b_1^\beta X_{u_\beta}(\omega) + \omega_2' \sum_{\beta=1}^{2} b_2^\beta X_{u_\beta}(\omega) =$$

$$\left(\omega_1^{'}\, b_1^1 + \omega_2^{'}\, b_2^1\right) X_{u_1}(\omega) +$$

$$\left(\omega_1^{'}\, b_1^2 + \omega_2^{'}\, b_2^2\right) X_{u_2}(\omega),$$

während man auf der rechten Seite von (8)

$$k\,\omega_1^{'}\, X_{u_1}(\omega) + k\,\omega_2^{'}\, X_{u_2}(\omega)$$

bekommt. Vergleich ergibt:

$$b_1^1\,\omega_1^{'} + b_2^1\,\omega_2^{'} = k\,\omega_1^{'};$$

$$b_1^2\,\omega_1^{'} + b_2^2\,\omega_2^{'} = k\,\omega_2^{'}.$$

Nun multipliziert man Zeile 1 mit $\omega_2^{'}$, Zeile 2 mit $-\omega_1^{'}$ und addiert die Ergebnisse. Es folgt:

$$-b_1^2\left(\omega_1^{'}\right)^2 - b_2^2\,\omega_1^{'}\,\omega_2^{'} + b_1^1\,\omega_1^{'}\omega_2^{'} + b_2^1\left(\omega_2^{'}\right)^2 \equiv 0.$$

Nun setzt man die Werte für b_α^β ein und multipliziert mit $-W^2 = \mathcal{F}^2 - \mathcal{E}\,\mathcal{G}$:

$$\left(\mathcal{E}\mathcal{M} - \mathcal{F}\mathcal{L}\right)\left(\omega_1^{'}\right)^2 + \left(\mathcal{E}\mathcal{N} - \mathcal{G}\mathcal{L}\right)\omega_1^{'}\omega_2^{'} +$$
$$\left(\mathcal{F}\mathcal{N} - \mathcal{G}\mathcal{M}\right)\left(\omega_2^{'}\right)^2 \equiv 0$$

oder

$$\det \begin{pmatrix} (\omega_2')^2 & -\omega_1'\omega_2' & (\omega_1')^2 \\ \mathcal{E} & \mathcal{F} & \mathcal{G} \\ \mathcal{L} & \mathcal{M} & \mathcal{N} \end{pmatrix} \equiv 0 .$$

<u>Beispiele:</u> 1.) <u>Berechnung von Gauß'scher und mittlerer Krümmung für Graphen</u> $X:(u,v) = (u,v,f(u,v))$: Hier ist

$$G = \begin{pmatrix} 1+f_u^2 & f_u f_v \\ f_u f_v & 1+f_v^2 \end{pmatrix},$$

$$B = \frac{1}{\sqrt{1+f_u^2+f_v^2}} \begin{pmatrix} f_{uu} & f_{uv} \\ f_{uv} & f_{vv} \end{pmatrix},$$

so dass

$$\boxed{K = \det\left(G^{-1}B\right) = \frac{1}{\det G}\det B = \frac{1}{1+f_u^2+f_v^2}\det B = \frac{f_{uu}f_{vv}-f_{uv}^2}{(1+f_u^2+f_v^2)^2}}$$

Entsprechend folgt aus

$$\bar{G}^{1} B = \frac{1}{\sqrt{1+f_u^2+f_v^2}^{\,3}} \begin{pmatrix} 1+f_v^2 & -f_u f_v \\ -f_u f_v & 1+f_u^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{uu} & f_{uv} \\ f_{uv} & f_{vv} \end{pmatrix} :$$

$$\boxed{H = \frac{1}{2}\,\mathrm{Spur}\left(\bar{G}^{1} B\right) = \frac{1}{\sqrt{1+f_u^2+f_v^2}^{\,3}} \Big[(1+f_v^2) f_{uu} - f_u f_v f_{uv} \cdot 2 + (1+f_u^2) f_{vv} \Big] \cdot \frac{1}{2}}$$

Flächen mit $H \equiv 0$ heißen <u>Minimalflächen.</u> Die Graphenfläche ist also genau dann eine Minimalfläche, wenn f die Minimalflächengleichung

$$\text{(MFG)} \qquad \boxed{(1+f_v^2)\, f_{uu} - 2 f_{uv} f_u f_v + (1+f_u^2) f_{vv} \equiv 0}$$

erfüllt. Das ist eine nichtlineare partielle Differentialgleichung für f, die auch durch

$$\mathrm{div}\left(\nabla f \Big/ \sqrt{1+|\nabla f|^2} \right) \equiv 0$$

ersetzt werden kann.

2.) H und K für Rotationsflächen

$X(u,v) = (f(v)\cos u, f(v)\sin u, g(v))$:

Es ist $\mathcal{E} = f^2$, $\mathcal{F} = 0$, $\mathcal{G} = (f')^2 + (g')^2$,

$\mathcal{L} = -f g' / \sqrt{\mathcal{G}}$, $\mathcal{M} = 0$, $\mathcal{N} = (f''g' - g''f')/\sqrt{\mathcal{G}}$,

wobei man

$$N(u,v) = (X_u \times X_v) / |X_u \times X_v| =$$

$$(g' \cos u, g' \sin u, -f') / \sqrt{\mathcal{G}}$$

benutzt zur Berechnung von $\mathcal{L}, \mathcal{M}, \mathcal{N}$. Damit folgt

$$G^{-1} B = \frac{1}{\mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2} \begin{pmatrix} \mathcal{G} & -\mathcal{F} \\ -\mathcal{F} & \mathcal{E} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{L} & \mathcal{M} \\ \mathcal{M} & \mathcal{N} \end{pmatrix} =$$

$$\frac{1}{f^2 \mathcal{G}} \begin{pmatrix} (f')^2 + (g')^2 & 0 \\ 0 & f^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{f g'}{\sqrt{\mathcal{G}}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\mathcal{G}}}(f''g' - g''f') \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow K = \underbrace{\frac{1}{f^4 \mathcal{G}^2} \quad f^2 \left((f')^2 + (g')^2\right)}_{= \det G^{-1}} \left[-\frac{f g'}{\mathcal{G}} \right] (f''g' - g''f')$$

$$= -\frac{1}{f\mathfrak{g}^2}\, g'\left(f''g' - f'g''\right) \Longrightarrow$$

$$\boxed{K = \frac{1}{\mathfrak{g}^2}\left[-\frac{g'(f''g'-f'g'')}{f}\right], \quad \mathfrak{g} = (f')^2 + (g')^2}$$

Entsprechend liefert $\frac{1}{2}\,\mathrm{Spur}\,(G^{-1}B)$ die mittlere Krümmung:

$$H = \frac{1}{2}\,\frac{1}{f^2\mathfrak{g}}\left[-\frac{fg'}{\sqrt{\mathfrak{g}}}\left((f')^2+(g')^2\right) + f^2\frac{1}{\sqrt{\mathfrak{g}}}\left(f''g'-f'g''\right)\right]$$

$$\Longrightarrow \boxed{H = \frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{\mathfrak{g}}}\left[-\frac{g'}{f} + \frac{f''g'-f'g''}{\mathfrak{g}}\right]}$$

Ist die Kurve $v \mapsto (f(v), g(v))$ nach der Bogenlänge parametrisiert, so gilt: $f'(v)^2 + g'(v)^2 = \mathfrak{g}(v) \equiv 1$

Es folgt: $f'f'' = -g'g''$, also in diesem Fall:

$$H = \frac{1}{2}\,\frac{-g' + f(f''g'-f'g'')}{f},$$

$$K = -\frac{g'}{f}\left(f''g'-f'g''\right) = -\frac{1}{f}\left(f''(g')^2 - f'g'g''\right) =$$

$$-\frac{1}{f}\left(f''(g')^2 + f''(f')^2\right) = -\frac{f''}{f}.$$

Gilt für eine Fläche X $\quad$ $\mathcal{F} = \mathcal{M} = 0$, so ist

$$G^{-1}B = \frac{1}{\mathcal{E}\mathcal{G}}\begin{pmatrix}\mathcal{G} & 0\\ 0 & \mathcal{E}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathcal{L} & 0\\ 0 & \mathcal{N}\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}\mathcal{L}/\mathcal{E} & 0\\ 0 & \mathcal{N}/\mathcal{G}\end{pmatrix},$$

d.h. die beiden Hauptkrümmungen sind $\boxed{\mathcal{L}/\mathcal{E} \text{ und } \mathcal{N}/\mathcal{G}.}$

Für eine Rotationsfläche mit $(f')^2 + (g')^2 = 1$ heißt das:

$$\{\varkappa_1, \varkappa_2\} = \{-g'/f,\ f''g' - g''f'\}.$$

Eine weitere Konsequenz von $\mathcal{F} = \mathcal{M} = 0$ bei Rotationsflächen ist, dass

$u \mapsto X(u,v)$, v fest,

$v \mapsto X(u,v)$, u fest,

Krümmungslinien sind: Sei etwa $v = v_0$ fest, $\omega(u) := (u, v_0)$.

Dann haben wir die Koordinatenkurve $\gamma(u) := (X \circ \omega)(u)$,

und diese ist Krümmungslinie, falls

$$\det \begin{pmatrix} (\omega_2')^2 & -\omega_1' \omega_2' & (\omega_1')^2 \\ \mathcal{E} & \mathcal{F} & \mathcal{G} \\ \mathcal{L} & \mathcal{M} & \mathcal{N} \end{pmatrix} = 0$$

ist. Hier hat die Matrix die Gestalt

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \mathcal{E} & 0 & \mathcal{G} \\ \mathcal{L} & 0 & \mathcal{N} \end{pmatrix},$$

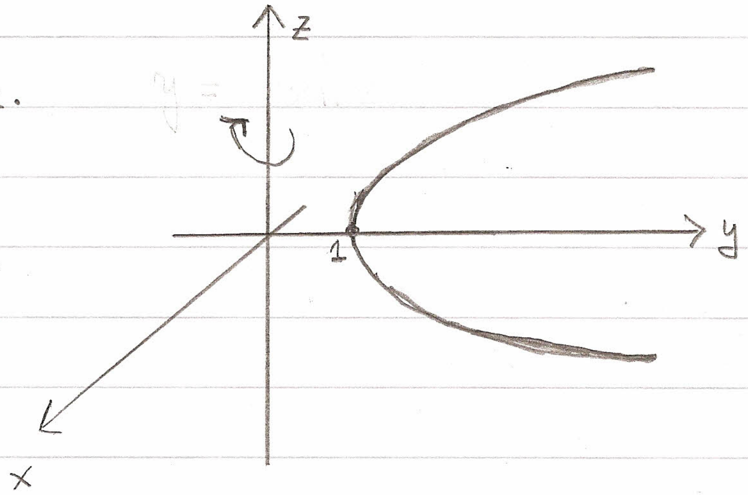
so dass $\det(\ldots) = 0$ klar ist. Für die andere

Koordinatenlinie gilt dasselbe Argument.

3.) Zwei klassische Minimalflächen

A.) Das Katenoid (Kettenfläche) entsteht als

Rotationsfläche $X(u,v) = (\cosh v \cos u, \cosh v \sin u, v)$, wenn man die Kurve $y = \cosh z$ um die z-Achse rotiert.



Hier ist es also so, dass man Punkte $(0, \cosh v, v)$ betrachtet und diese um die z-Achse dreht. Mit der üblichen Notation ist $f(v) = \cosh v$, $g(v) = v$, die Formeln aus Beispiel 2.) ergeben

$$H = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\mathcal{G}}} \left[-\frac{g'}{f} + \frac{f'' g' - g'' f'}{\mathcal{G}} \right] =$$

$$\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\mathcal{G}}} \left[-\frac{1}{\cosh v} + \frac{\cosh v}{\mathcal{G}} \right],$$

$$\mathcal{G} = X_v \cdot X_v = |(\sinh v \cos u, \sinh v \sin u, 1)|^2$$

$$= 1 + \sinh^2 v = \cosh^2 v,$$

also $\quad H = \frac{1}{2} \frac{1}{\cosh v} \left[- \frac{1}{\cosh v} + \frac{1}{\cosh v} \right] \equiv 0,$

das Katenoid ist per Definition eine Minimalfläche.

Für die Hauptkrümmungen findet man

$$\varkappa_1 = -1/\cosh^2 v = -\varkappa_2,$$

die Gauß-Krümmung errechnet sich daraus zu $K = -(\cosh v)^{-4}$.

B.) Das Helikoid (= Schraubenfläche, Wendelfläche) entsteht, wenn man die Helix $(\cos u, \sin u, u)$ nimmt und durch jeden Punkt auf der Helix eine Gerade parallel zur xy-Ebene zieht, die die z-Achse schneidet. Das Helikoid wird durch diese Geraden erzeugt, eine Parametrisierung ist

$$X(u,v) = (v \cos u,\ v \sin u,\ u)$$

mit $X_u = (-v \sin u,\ v \cos u,\ 1)$, $X_v = (\cos u,\ \sin u,\ 0)$,

$N = \frac{1}{\sqrt{1+v^2}} (-\sin u,\ \cos u,\ -v)$. Daraus folgt $H \equiv 0$. ⟨Übung⟩